ファジィノルムとファジィ距離 (不確実性の下での意思決定理論とその応用 : 計画数学の展開)

金, 正道

数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 160-165

ファジィノルムとファジィ距離

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概 要

本稿では、ファジィ集合の違いを測るファジィノルムおよびファジィ距離を提案し、その基本的な性質を調べる。

1 準備

$\mathbb{R}$ および $\mathbb{C}$ をそれぞれすべての実数および複素数の集合とする。$\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}$ および$\mathbb{R}_-=\{x\in\mathbb{R}:x\leq 0\}$ とする。$\mathrm{int}(\mathbb{R}_+)$ および $\mathrm{int}(\mathbb{R}_-)$ をそれぞれ$\mathbb{R}_+$ および $\mathbb{R}_-$ の内部とする。$a,b\in\mathbb{R}$ に対して、$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x\leq b\}$, $[a,b[=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x<b\}$, $]a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\leq b\}$ および $]a,b[=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$ とする。

本節を通して、U を空でない集合とする。U 上のファジィ集合 $\widetilde{a}$ とそのメンバーシップ関数を同一視し、その同一視されたメンバーシップ関数も $\widetilde{a}:U\to[0,1]$ と表す。U 上のすべてのファジィ集合の集合を $\mathcal{F}(U)$ とする。$\widetilde{a}\in\mathcal{F}(U)$ と $\alpha\in]0,1]$ に対して、$\widetilde{a}$ の α-レベル集合は

$$[\widetilde{a}]_\alpha=\{x\in U:\widetilde{a}(x)\geq\alpha\}$$

と定義される。クリスプ集合 $S\subset U$ に対して、S の指示関数は各 $x\in U$ に対して

$$c_S(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in S\\ 0 & \text{if } x\notin S\end{cases}$$

である $c_S:U\to\{0,1\}$ と定義される。また、各 $x\in U$ に対して、$\widetilde{x}=c_{\{x\}}\in\mathcal{F}(U)$ とする。$\widetilde{a}\in\mathcal{F}(U)$ は

$$\widetilde{a}=\sup_{\alpha\in]0,1]}\alpha c_{[\widetilde{a}]_\alpha}$$

と表現でき、分解定理として知られている（例えば、[1] 参照)。

$$\mathcal{S}(U)=\{\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}:S_\alpha\subset U,\alpha\in]0,1],\ \text{and } S_\beta\supset S_\gamma \text{ for } \beta,\gamma\in]0,1] \text{ with } \beta<\gamma\}$$

とし、$M_U:\mathcal{S}(U)\to\mathcal{F}(U)$ を各 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}\in\mathcal{S}(U)$ に対して

$$M_U(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})=\sup_{\alpha\in]0,1]}\alpha c_{S_\alpha}$$

と定義する。$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(U)$ と $x \in U$ に対して

$$M_U(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})(x) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{S_\alpha}(x) = \sup\{\alpha \in]0,1] : x \in S_\alpha\}$$

と表せる。ただし、$\sup\emptyset = 0$ とする。また、分解定理は、$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(U)$ に対して

$$\widetilde{a} = M_U(\{[\widetilde{a}]_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})$$

と表せる。

$2^{\mathbb{R}}$ 上の順序の定義を与える。

定義 1 $A, B \subset \mathbb{R}$ とする。

$$\begin{aligned} A \leq B &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + \mathbb{R}_+ \text{ and } A \subset B + \mathbb{R}_- \\ &\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} \forall v \in B, \exists u \in A \text{ s.t. } u \leq v \\ &\qquad\qquad \text{and} \\ &\quad\ \ \forall u \in A, \exists v \in B \text{ s.t. } u \leq v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A < B &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + \mathrm{int}(\mathbb{R}_+) \text{ and } A \subset B + \mathrm{int}(\mathbb{R}_-) \\ &\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} \forall v \in B, \exists u \in A \text{ s.t. } u < v \\ &\qquad\qquad \text{and} \\ &\quad\ \ \forall u \in A, \exists v \in B \text{ s.t. } u < v \end{aligned}$$

ファジィ集合のレベル集合の順序を用いた $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ 上の順序の定義を与える。

定義 2 $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ とする。

$$\begin{aligned} \widetilde{a} \preceq \widetilde{b} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\widetilde{a}]_\alpha \leq [\widetilde{b}]_\alpha, \forall\alpha \in]0,1] \\ \widetilde{a} \prec \widetilde{b} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\widetilde{a}]_\alpha < [\widetilde{b}]_\alpha, \forall\alpha \in]0,1] \end{aligned}$$

定義 2 にける $\preceq$ および $\prec$ をそれぞれ $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ 上のファジィマックス順序および狭義ファジィマックス順序とよぶことにする。ファジィ数に対するファジィマックス順序は [4] において初めて定義され、それを扱った研究は多い。

2 クリスプ集合に対するノルムと距離

本節では、クリスプ集合に対するノルムと距離を定義しそれらの基本的な性質を調べる。これらは、次節においてファジィ集合に対するファジィノルムとファジィ距離の基本的な性質を調べるときに必要になる。

以下本稿を通して、(X, d_X) を距離空間とし、(Y, d_Y) を距離 d_Y と零元 0_Y をもつ複素ベクトル空間とし、$(Z, \|\cdot\|)$ を零元 0_Z をもつ複素ノルム空間とする。ノルム空間 $(Z, \|\cdot\|)$ を考えるときは、$d_Z : Z \times Z \to \mathbb{R}$ が $d_Z(x, y) = \|x - y\|, x, y \in Z$ と定義されていると する。

$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ がコンパクトファジィ集合であるとは $[\widetilde{a}]_\alpha, \alpha \in]0,1]$ がコンパクト集合になるときをいう。また、$\mathcal{FBC}(X)$ を X 上のすべてのコンパクトファジィ集合の集合とする。

次は、クリスプ集合に対するノルムと距離の定義である。

定義3

(i) $A \subset Z$ とする。$\|A\| = \{\|z\| : z \in A\} \subset \mathbb{R}$ を A のノルムという。

(ii) $A, B \subset X$ とする。$d_X(A,B) = \{d_X(x,y) : x \in A, y \in B\} \subset \mathbb{R}$ を A と B の間の距離という。

定義3において、$\|A\|$ はノルム関数 $\|\cdot\| : Z \to \mathbb{R}$ の下での A の像を表わし、$d_X(A,B)$ は距離関数 $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ の下での $A \times B$ の像を表わすことに注意。

命題1　$A, B \subset Z$ とし、$\lambda \in \mathbb{C}$ とする。

(i) $A \neq \emptyset \Rightarrow \|A\| \geq \{0\}$

(ii) $A = \{0_Z\} \Leftrightarrow \|A\| = \{0\}$

(iii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

(iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

命題2　$A, B, C \subset X$ とする。

(i) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \Rightarrow d_X(A,B) \geq \{0\}$

(ii) $A = B = \{x_0\}$ for some $x_0 \in X \Leftrightarrow d_X(A,B) = \{0\}$

(iii) $d_X(A,B) = d_X(B,A)$

(iv) $A = \emptyset$ or $C = \emptyset$ or $B = \{y_0\}$ for some $y_0 \in X \Rightarrow d_X(A,C) \leq d_X(A,B) + d_X(B,C)$

d_Y が translation invariant であるとは、任意の $x, y, z \in Y$ に対して $d_Y(y,z) = d_Y(y+x, z+x)$ となるときをいう。d_Y が homogeneous であるとは、任意の $x, y \in Y$ と任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $d_Y(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d_Y(x,y)$ となるときをいう。

命題3　$A, B, C \subset Y$ とし、$\lambda \in \mathbb{C}$ とする。

(i) $d_Y(A,B) = d_Y(A+C, B+C)$ が成り立つとは限らない。

(ii) d_Y が translation invariant ならば、$d_Y(A,B) = d_Y(A+x, B+x)$, $x \in Y$ となる。

(iii) d_Y が homogeneous ならば、$d_Y(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d_Y(A,B)$ となる。

命題4　$A, B \subset Z$ とする。このとき、$d_Z(A,B) = \|A - B\|$ となる。

3　ファジィノルムとファジィ距離

本節では、ファジィ集合に対するファジィノルムおよびファジィ距離を提案し、その基本的な性質を調べる。

次は、Zadeh の拡張原理によるファジィノルムとファジィ距離の定義である。Zadeh の拡張原理に関しては、例えば [1,3] 参照。

定義4

(i) $\widetilde{a} \in \mathcal{F}(Z)$ に対して、$\|\widetilde{a}\| \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を

$$\|\widetilde{a}\|(u) = \sup_{u=\|x\|} \widetilde{a}(x), \quad u \in \mathbb{R}$$

と定義し、$\|\widetilde{a}\|$ を $\widetilde{a}$ のファジィノルムという。

(ii) $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(X)$ に対して、$d_X(\widetilde{a}, \widetilde{b}) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を

$$d_X(\widetilde{a}, \widetilde{b})(u) = \sup_{u=d_X(x,y)} \min\{\widetilde{a}(x), \widetilde{b}(y)\}, \quad u \in \mathbb{R}$$

と定義し、$d_X(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ を $\widetilde{a}$ と $\widetilde{b}$ の間のファジィ距離という。

(iii) $\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X), b \in X$ に対して、$d_X(\widetilde{a}, b) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を

$$d_X(\widetilde{a}, b)(u) = \sup_{u=d_X(x,b)} \widetilde{a}(x), \quad u \in \mathbb{R}$$

と定義し、$d_X(\widetilde{a}, b)$ を $\widetilde{a}$ と b の間のファジィ距離という。また、$d_X(b, \widetilde{a}) = d_X(\widetilde{a}, b)$ と定義し、$d_X(b, \widetilde{a})$ を b と $\widetilde{a}$ の間のファジィ距離という。

命題5 $\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ とし、$b \in X$ とする。このとき、$d_X(\widetilde{a}, b) = d_X(\widetilde{a}, c_{\{b\}})$ となる。

命題6 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(Z)$ とし、$\widetilde{a} = M_Z(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(Z)$ とする。このとき

$$\|\widetilde{a}\| = M_{\mathbb{R}}(\{\|S_\alpha\|\}_{\alpha\in]0,1]}) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{\|S_\alpha\|}$$

となる。

命題7 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}, \{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(X)$ とし、$\widetilde{a} = M_X(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})$, $\widetilde{b} = M_X(\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(X)$ とする。このとき

$$d_X(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = M_{\mathbb{R}}(\{d_X(S_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha\in]0,1]}) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{d_X(S_\alpha, T_\alpha)}$$

となる。

次は、Zadeh の拡張原理によるファジィ集合の加法, 減法, スカラー倍の定義である。

定義5 V を複素ベクトル空間とする。

(i) $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(V)$ に対して、$\widetilde{a} + \widetilde{b} \in \mathcal{F}(V)$ を

$$(\widetilde{a} + \widetilde{b})(x) = \sup_{x=y+z} \min\{\widetilde{a}(y), \widetilde{b}(z)\}, \quad x \in V$$

と定義し、$\widetilde{a} + \widetilde{b}$ を $\widetilde{a}$ と $\widetilde{b}$ の和という。

(ii) $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(V)$ に対して、$\widetilde{a} - \widetilde{b} \in \mathcal{F}(V)$ を

$$(\widetilde{a} - \widetilde{b})(x) = \sup_{x=y-z} \min\{\widetilde{a}(y), \widetilde{b}(z)\}, \quad x \in V$$

と定義し、$\widetilde{a} - \widetilde{b}$ を $\widetilde{a}$ と $\widetilde{b}$ の差という。

(iii) $\widetilde{a} \in \mathcal{F}(V)$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$\lambda\widetilde{a} \in \mathcal{F}(V)$ を

$$(\lambda\widetilde{a})(x) = \sup_{x=\lambda y} \widetilde{a}(y), \quad x \in V$$

と定義し、$\lambda\widetilde{a}$ を $\widetilde{a}$ の λ 倍という。

命題８　V を複素ベクトル空間とし、$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}$, $\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(V)$ とし、$\widetilde{a} = M_V(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})$, $\widetilde{b} = M_V(\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(V)$ とする。また、$\lambda \in \mathbb{C}$ とする。このとき

$$\begin{aligned} \widetilde{a} + \widetilde{b} &= M_V(\{S_\alpha + T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \\ \widetilde{a} - \widetilde{b} &= M_V(\{S_\alpha - T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \\ \lambda\widetilde{a} &= M_V(\{\lambda S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \end{aligned}$$

となる。

命題９　V を複素ベクトル空間とし、$\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(V)$ とする。このとき

$$\widetilde{a} + (-1)\widetilde{b} = \widetilde{a} - \widetilde{b}$$

となる。

命題１０　$\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(Z)$ とする。

(i) $d_Z(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = \|\widetilde{a} - \widetilde{b}\|$

(ii) $d_Z(\widetilde{a}, \widetilde{0}_Z) = \|\widetilde{a} - \widetilde{0}_Z\| = d_Z(\widetilde{a}, 0_Z)$

命題１１　$\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(Z)$ とし、$\lambda \in \mathbb{C}$ とする。

(i) $[\widetilde{a}]_1 \neq \emptyset \Rightarrow [\|\widetilde{a}\|]_1 \neq \emptyset \Rightarrow \|\widetilde{a}\| \succeq \widetilde{0}$

(ii) $\widetilde{a} = \widetilde{0}_Z \Leftrightarrow \|\widetilde{a}\| = \widetilde{0}$

(iii) $\|\lambda\widetilde{a}\| = |\lambda|\|\widetilde{a}\|$

(iv) $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{FBC}(Z)$ ならば、$\|\widetilde{a} + \widetilde{b}\| \preceq \|\widetilde{a}\| + \|\widetilde{b}\|$ となる。

命題１２　$\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(X)$ とする。

(i) $[\widetilde{a}]_1 \neq \emptyset, [\widetilde{b}]_1 \neq \emptyset \Rightarrow [d_X(\widetilde{a}, \widetilde{b})]_1 \neq \emptyset \Rightarrow d_X(\widetilde{a}, \widetilde{b}) \succeq \widetilde{0}$

(ii) $\widetilde{a} = \widetilde{b} = c_{\{x_0\}}$ for some $x_0 \in X \Leftrightarrow d_X(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = \widetilde{0}$

(iii) $d_X(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = d_X(\widetilde{b}, \widetilde{a})$

(iv) d_Y は translation invariant かつ homogeneous であるとする。さらに、$\widetilde{a}', \widetilde{c}' \in \mathcal{FBC}(Y)$

とし、ある $x \in Y$ に対して $\widetilde{b}' = c_{\{x\}}$ であるとする。このとき、$d_Y(\widetilde{a}', \widetilde{c}') \preceq d_Y(\widetilde{a}', \widetilde{b}') + d_Y(\widetilde{b}', \widetilde{c}')$ となる。

命題１３ $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c} \in \mathcal{F}(Y)$ とし、$\lambda \in \mathbb{C}$ とする。

(i) $d_Y(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = d_Y(\widetilde{a} + \widetilde{c}, \widetilde{b} + \widetilde{c})$ が成り立つとは限らない。

(ii) d_Y が translation invariant ならば、$d_Y(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = d_Y(\widetilde{a} + c_{\{x\}}, \widetilde{b} + c_{\{x\}}),\ x \in Y$ となる。

(iii) d_Y が homogeneous ならば、$d_Y(\lambda\widetilde{a}, \lambda\widetilde{b}) = |\lambda| d_Y(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ となる。

4 結論

本稿では、ファジィ集合の違いを測るファジィノルムおよびファジィ距離を提案した。ファジィノルムおよびファジィ距離は、Zadeh の拡張原理を用いて定義され、その基本的な性質を調べた。提案されたファジィノルムとファジィ距離は、不確実性や曖昧さを含むデータの違いを測る場合に有用になることが期待される。

複数の個体の特性を表わすデータが与えられたとき、任意の 2 つの個体の特性間の違いは何らかのノルムまたは距離を用いて測られ、測られた違いに基づいて分析される。しかし、そのようなデータには観測または人間の判断による不確実性や曖昧さを含む場合も多い。そのような場合、1 つの個体の特性を 1 点として扱うのではなく、その個体の特性が含まれるであろう範囲を表わす集合として表現するほうがより適切であり、さらにその範囲は曖昧な場合が多いと思われるので、そのような集合をファジィ集合で表現するほうがより適切であると考えられる。ファジィ集合で表わされたデータを分析するとき、ファジィ集合間の違いを測るファジィノルムまたはファジィ距離が必要かつ重要になる。

参考文献

[1] D. Dubois, W. Ostasiewicz and H. Prade, Fuzzy sets: history and basic notions, in *Fundamentals of Fuzzy Sets* (D. Dubois and H. Prade, Eds.) (Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000), pp.21-124.

[2] J. R. Giles, Introduction to the Analysis of Normed Linear Spaces, (Cambridge, 2000).

[3] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 64, 1978, pp.369-380.

[4] J. Ramík and J. Řimánek, Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 16, 1985, pp. 123-138.